模块二 随机事件的概率、事件的独立性（★★☆）

内容提要

本节包括事件的关系和运算、古典概型、概率的基本性质、事件的独立性，相关概念较多，先进行梳理.

1．事件的关系和运算

事件的关系或运算	含义	符号表示
包含	若 A 发生，则 B 必然发生	$A\subseteq B$
并事件（和事件）	A 与 B 至少有一个发生	$A\cup B$ 或 $A+B$
交事件（积事件）	A 与 B 同时发生	$A\cap B$ 或 AB
互斥（互不相容）	A 与 B 不能同时发生	$A\cap B=\varnothing$
互为对立	A 与 B 有且仅有一个发生	$A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$

2．古典概型：满足①样本空间的样本点只有有限个，②每个样本点发生的可能性相等这两个特征的试验称为古典概型试验，其数学模型称为古典概型. 在古典概型中，事件 A 发生的概率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$，其中 $n(A)$ 表示事件 A 包含的样本点的个数，$n(\Omega)$ 表示样本空间 Ω 包含的样本点个数.

3．概率的基本性质

①对任意事件 A，都有 $0\le P(A)\le 1$.

②必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，即 $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$.

③互斥事件的概率加法公式：若事件 A 与事件 B 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

④若事件 A 与事件 B 互为对立事件，则 $P(A)=1-P(B)$，$P(B)=1-P(A)$，事件 A 的对立事件一般记作 $\overline{A}$.

⑤若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\le P(B)$.

⑥设 A，B 是一个随机试验中的两个事件，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1-P(\overline{A}\overline{B})$.

注：以上公式都可用集合中的 Venn 图来理解.

4．事件的独立性：对任意两个事件 A 和 B，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立. 当事件 A 与 B 独立时，$\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

典型例题

类型Ⅰ：抽象概率计算、概率恒等式分析

【例 1】假设 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，且 A 与 B 相互独立，则 $P(A\cup B)=$（　　）

（A）0.12　　（B）0.58　　（C）0.7　　（D）0.88

解析： A，B 独立，而不是互斥，故求 $P(A\cup B)$ 想到内容提要第 3 点⑥和第 4 点的公式，

由题意，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.3+0.4-0.3\times 0.4=0.58$.

答案： B

【例 2】（多选）设 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 分别为事件 A，B 的对立事件，如果 A，B 两个事件独立，那么以下四个概率等式一定成立的是（　　）

（A）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　（B）$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})P(B)$

（C） $P(\bar{A}\cap\bar{B})=[1-P(A)][1-P(B)]$ （D） $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})$

解析：观察选项发现可用内容提要第 3 点④⑥和第 4 点的公式展开来看，下面依次分析，

A 项，由题意，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\neq P(A)+P(B)$，故 A 项错误；

B 项，A，B 独立 $\Rightarrow \bar{A}$ 与 B 也独立，所以 $P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})P(B)$，故 B 项正确；

C 项，A，B 独立 $\Rightarrow \bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也独立，所以 $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=[1-P(A)][1-P(B)]$，故 C 项正确；

D 项，$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A})P(\bar{B})\neq P(\bar{A})+P(\bar{B})$，故 D 项错误.

答案：BC

类型Ⅱ：古典概型

【例 3】从 2，3，4，5，6 这 5 个数中随机取 3 个不同的数，则可用这 3 个数作为三角形的三边长的概率是_____.

解析：由于是否构成三角形必须一一验证，故直接列出样本空间中的样本点，

由题意，样本空间 $\Omega=\{(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6),(2,5,6),(3,4,5),(3,4,6),(3,5,6),(4,5,6)\}$，

记选出的 3 个数能作为三角形的三边长为事件 A，能作为三角形三边长即较小的两数之和大于最大的数，

所以 $A=\{(2,3,4),(2,4,5),(2,5,6),(3,4,5),(3,4,6),(3,5,6),(4,5,6)\}$，故 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{7}{10}$.

答案：$\dfrac{7}{10}$

【反思】当必须一一验证样本点是否在事件 A 中时，直接列出样本空间中的样本点，再逐个分析.

【变式 1】在“2，3，5，7，11，13”这 6 个素数中，任取 2 个不同的数，这两数之和仍为素数的概率是_____.

解法 1：素数是指大于 1 的自然数中，除了 1 和它本身以外不再有其他因数的自然数，两数之和是否仍为素数必须一一验证，故列出样本空间中的样本点，

样本空间 $\Omega=\{(2,3),(2,5),(2,7),(2,11),(2,13),(3,5),(3,7),(3,11),(3,13),(5,7),(5,11),(5,13),(7,11),(7,13),(11,13)\}$，

记选出的两数之和仍为素数为事件 A，则 $A=\{(2,3),(2,5),(2,11)\}$，所以 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$.

解法 2：本题也可不罗列样本空间，因为若取到 2 个奇数，则和必为偶数，不是素数，所以必定为 1 奇 1 偶，故 2 必须取，只需看另一个奇数可以为哪些，

由题意，$n(\Omega)=C_6^2=15$，若选到的两数之和仍为素数，则只能取到 2 和 3，2 和 5，2 和 11，

有 3 种情况，故所求概率 $P=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$.

答案：$\dfrac{1}{5}$

【变式 2】掷一枚质地均匀的骰子 2 次，则向上的点数之和等于 6 的概率为_____.

解析： 概率模型为古典概型，先算样本空间 Ω 包含的样本点个数，

由题意，每次掷出的点数都有 6 种可能，由分步乘法计数原理，$n(\Omega)=6\times 6=36$，

样本空间的样本点数较多，罗列再一一检验较为繁琐，故直接分析 A 有哪些样本点，

记向上的点数之和等于 6 为事件 A，则 $A=\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$，所以 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{5}{36}$.

答案： $\dfrac{5}{36}$

【例 4】袋中装有大小相同的 2 个白球和 5 个红球，从中任取 2 个球，则取到的 2 个球颜色相同的概率是（　　）

（A）$\dfrac{3}{7}$　　（B）$\dfrac{4}{7}$　　（C）$\dfrac{10}{21}$　　（D）$\dfrac{11}{21}$

解析： 可按古典概率公式 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ 来求概率，且 $n(\Omega)$ 和 $n(A)$ 都可用排列组合方法计算，无需罗列，

由题意，$n(\Omega)=C_7^2=21$，记取到的 2 个球颜色相同为事件 A，则 $n(A)=C_2^2+C_5^2=11$，所以 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{11}{21}$.

答案： D

【例 5】某校进行“七选三”选课，甲、乙两名学生都要从物理、化学、生物、政治、历史、地理和技术这 7 门课中选 3 门课程进行高考，假设他们对这 7 门课程都没有偏好，则他们所选课程中恰有 2 门相同的概率为（　　）

（A）$\dfrac{12}{35}$　　（B）$\dfrac{13}{35}$　　（C）$\dfrac{15}{28}$　　（D）$\dfrac{13}{28}$

解析： 样本空间包含的样本点数较多，考虑用排列组合的方法来求 $n(\Omega)$ 和 $n(A)$，

甲和乙都有 $C_7^3=35$ 种选法，所以 $n(\Omega)=35\times 35$，

若甲、乙所选课程中恰有 2 门相同，则可先从 7 门课中选 2 门，作为甲乙都选的课程，有 C_7^2 种选法，

再从余下的 5 门课程中选 2 门，分别安排给甲和乙，有 A_5^2 种方法，故共有 $C_7^2A_5^2=21\times 20$ 种选法，

由古典概率公式，所求概率 $P=\dfrac{21\times 20}{35\times 35}=\dfrac{12}{35}$.

答案： A

【例 6】从分别写有 1，2，3，4，5，6 的 6 张卡片中无放回随机抽取 2 张，则抽到的 2 张卡片上的数字之积是 2 的倍数的概率为_____.

解析： 本题的 $n(\Omega)$ 和 $n(A)$ 都可用排列组合方法计算，故不罗列，

记抽到的 2 张卡片上的数字之积是 2 的倍数为事件 A，由题意，$n(\Omega)=C_6^2=15$，

而要使抽到的 2 张卡片上的数字之积是 2 的倍数，则至少应抽到 1 个偶数，

若抽到 1 奇 1 偶，则有 $C_3^1C_3^1=9$ 种抽法；若抽到 2 偶，则有 $C_3^2=3$ 种抽法；

所以 $n(A)=9+3=12$，故 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$.

答案： $\dfrac{4}{5}$

【总结】在样本空间的样本点不多的情况下，可以采用罗列样本空间，再逐一检验样本点的方法计算古典概率；若样本点数较多，则考虑用排列组合的方法来处理；有时也可结合起来使用，样本点总数用排列组合方法算，而求概率的事件的样本点则一一罗列.

类型III：互斥、对立、独立有关概念题

【例 7】分别掷两枚质地均匀的硬币，记“第一枚为正面”为事件 A，“第二枚为正面”为事件 B，“两枚结果相同”为事件 C，则（　　）

（A）A 与 B，A 与 C 均相互独立　　（B）A 与 B 相互独立，A 与 C 互斥

（C）A 与 B，A 与 C 均互斥　　（D）A 与 B 互斥，A 与 C 相互独立

解析：只要列出 A，B，C 的样本点，关系就清晰了，为了便于书写，用 1 表示正面，0 表示反面，例如，$(1,0)$表示第一枚正面，第二枚反面，

由题意，样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$，事件 $A=\{(1,1),(1,0)\}$，$B=\{(1,1),(0,1)\}$，$C=\{(1,1),(0,0)\}$，

所以 $A\cap B=\{(1,1)\}\neq\varnothing$，$A\cap C=\{(1,1)\}\neq\varnothing$，从而 A 与 B，A 与 C 均不互斥，可排除 B、C、D，故选 A；

若要分析选项 A，可用相互独立的定义来验证，$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{n(C)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $P(AB)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{4}=P(A)P(B)$，所以 A 与 B 相互独立，

因为 $P(AC)=\dfrac{n(A\cap C)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{4}=P(A)P(C)$，所以 A 与 C 相互独立.

答案：A

【反思】①判断事件 A 和 B 是否相互独立，就看它们是否满足 $P(AB)=P(A)P(B)$；②判断事件 A 和 B 是否互斥，就看 $A\cap B$ 是否为 $\varnothing$.

【变式 1】（2021·新高考 I 卷）有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中有放回地随机抽取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则（　　）

（A）甲与丙相互独立　（B）甲与丁相互独立　（C）乙与丙相互独立　（D）丙与丁相互独立

解析：因为是有放回地抽取两次，所以每次都有 6 种结果，故 $n(\Omega)=6\times 6=36$，

观察发现甲、乙、丙、丁的样本点不多，故通过罗列它们的样本点，结合古典概率公式求各自的概率，

事件甲 $=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$，乙 $=\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$，

丙 $=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$，丁 $=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$，

所以$P(甲)=\dfrac{n(甲)}{n(\Omega)}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，$P(乙)=\dfrac{n(乙)}{n(\Omega)}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，$P(丙)=\dfrac{n(丙)}{n(\Omega)}=\dfrac{5}{36}$，$P(丁)=\dfrac{n(丁)}{n(\Omega)}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，

接下来可利用内容提要第 4 点的独立事件定义式$P(AB)=P(A)P(B)$来判断选项的两事件是否独立，

A 项，$甲\cap丙=\varnothing$，所以$P(甲\cap丙)=0\neq P(甲)P(丙)$，从而甲与丙不独立，故 A 项错误；

B 项，$甲\cap丁=\{(1,6)\}$，所以$P(甲\cap丁)=\dfrac{1}{36}=P(甲)P(丁)$，从而甲与丁相互独立，故 B 项正确；

C 项，$乙\cap丙=\{(6,2)\}$，所以$P(乙\cap丙)=\dfrac{1}{36}$，而$P(乙)P(丙)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{36}=\dfrac{5}{216}$，所以$P(乙\cap丙)\neq P(乙)P(丙)$，从而乙与丙不独立，故 C 项错误；

D 项，$丙\cap丁=\varnothing$，所以$P(丙\cap丁)=0\neq P(丙)P(丁)$，从而丙与丁不独立，故 D 项错误.

答案：B

【变式 2】随着北京冬奥会的举办，中国冰雪运动的参与人数有了突飞猛进的提升. 某校为提升学生的综合素养，大力推广冰雪运动，号召青少年成为“三亿人参与冰雪运动的主力军”，开设了“陆地冰壶”、“陆地冰球”、“滑冰”、“模拟滑雪”四类冰雪运动体验课程. 甲、乙两名同学各自从中任意挑选两门课程学习，设事件$A=$“甲、乙两人所选课程恰有一门相同”，事件$B=$“甲、乙两人所选课程完全不同”，事件$C=$“甲、乙两人均未选择陆地冰壶课程”，则（　　）

（A）A与B为对立事件　　（B）A与C互斥　　（C）A与C相互独立　　（D）B与C相互独立

解析：甲、乙各有$C_4^2=6$种选法，所以共有$6\times6=36$种选法，故$n(\Omega)=36$，

样本点个数较多，且不易罗列，故用排列组合的方法分析各事件的样本点情况，

A 项，当甲、乙选择的两门课都相同时，A和B都不发生，所以A和B不对立，故 A 项错误；

B 项，若甲选陆地冰球和滑冰，乙选陆地冰球和模拟滑雪，则A、C同时发生，所以A、C不互斥，故 B 项错误；

C 项，先分析A，C，$A\cap C$包含的样本点个数，

若事件A发生，则两人有 1 门课程相同，先把这 1 门选出来，有C_4^1种选法，另外 1 门不同，可从余下的 3 门课中选 2 门分别安排给甲和乙，有A_3^2种方法，所以$n(A)=C_4^1A_3^2=24$，故$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{24}{36}=\dfrac{2}{3}$，

若事件C发生，则甲、乙两人各自都有$C_3^2=3$种选法，所以$n(C)=3\times3=9$，故$P(C)=\dfrac{n(C)}{n(\Omega)}=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$，

若$A\cap C$发生，则甲、乙都在除陆地冰壶外的 3 门课中选，且只有 1 门相同，可先把这门选出来，有C_3^1种选法，余下的两门分别安排给甲和乙即可，有A_2^2种方法，所以$n(A\cap C)=C_3^1A_2^2=6$，故$P(A\cap C)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，

所以$P(A\cap C)=P(A)P(C)$，从而A与C相互独立，故 C 项正确；

D 项，若事件B发生，则直接从 4 门课中选 2 门给甲，有C_4^2种选法，余下的 2 门给乙，只有 1 种方法，所以$n(B)=C_4^2=6$，故$P(B)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，

再看$B\cap C$的情况，若事件C发生了，则甲和乙只有 3 门课程可选，他们的课程不可能完全不同，所以B

不会发生，故 $B\cap C=\varnothing$，所以 $P(B\cap C)=0\neq P(B)P(C)$，从而 B 与 C 不独立，故 D 项错误.

答案：C

【总结】判断事件是否互斥、对立、独立，若样本点个数不多，则可罗列样本点，结合互斥、对立、独立的定义来进行判断；若样本点个数多，则可用排列组合的方法来分析各事件包含的样本点个数.

类型Ⅳ：用对立事件求概率

【例 8】为了推广一种新饮料，某饮料生产企业开展了有奖促销活动：将 8 罐这种饮料装一箱，每箱中都放置 3 罐能中奖的饮料. 若从一箱中随机抽出 2 罐，能中奖的概率为_____.

解析：能中奖包含抽到 1 罐或 2 罐中奖饮料，其对立事件为 2 罐都不中奖，故对立事件更简单，

由题意，能中奖的概率 $P=1-\dfrac{C_5^2}{C_8^2}=\dfrac{9}{14}$.

答案：$\dfrac{9}{14}$

【变式】甲、乙、丙三人射击命中目标的概率分别是 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，现三人同时射击目标，则目标被击中的概率为（　　）

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）$\dfrac{23}{24}$

解析：目标被击中表示甲、乙、丙三人至少有 1 人击中，可能的情形较多，其对立事件只有三人均未击中 1 种情况，故用对立事件求概率更简单，

由题意，目标被击中的概率 $P=1-(1-\dfrac{1}{2})\times(1-\dfrac{2}{3})\times(1-\dfrac{3}{4})=\dfrac{23}{24}$.

答案：D

【总结】当事件 A 包含的情况较多，而其对立事件 $\overline{A}$ 的情形较少，则可用 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 来求 A 的概率；至多、至少是使用对立事件求概率的常见标志用语.

类型Ⅴ：由加法公式和乘法公式求概率

【例 9】市场供应的电子产品中，甲厂产品的合格率为 90%，乙厂产品的合格率是 80%，若从该市场供应的电子产品中任意购买甲厂、乙厂的电子产品各一件，则这两件产品中恰有一件合格品的概率是_____.

解析：设这两件产品中，甲厂产品是合格品为事件 A，乙厂产品是合格品为事件 B，恰有一件合格品为事件 C. 则 C 有两种情况：甲厂合格乙厂不合格，甲厂不合格乙厂合格，用符号表示分别为 $A\overline{B}$，$\overline{A}B$，

由于 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥，所以 $P(C)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$，

由题意可分析出 A，B 相互独立，于是 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立，

故 $P(C)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.9\times(1-0.8)+(1-0.9)\times0.8=0.26$.

答案：0.26

【变式 1】近年来，部分高校根据教育部相关文件规定开展基础学科招生改革试点（也称强基计划），假设甲、乙、丙三人通过强基计划的概率分别为$\frac{4}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{4}$，且通过与否彼此没有影响，那么三人中恰有两人通过强基计划的概率为_____.

解析：先分析恰有两人通过有几种情况，为了方便阐述，设一些字母来表示事件，

设甲、乙、丙通过强基计划分别为事件 A，B，C，则 A，B，C 相互独立，

设三人中恰有两人通过强基计划为事件 D，则 D 有三种可能：$AB\bar{C}$，$A\bar{B}C$，$\bar{A}BC$，它们彼此互斥，

由加法公式和乘法公式，$P(D)=P((AB\bar{C})\cup(A\bar{B}C)\cup(\bar{A}BC))=P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)$

$$=P(A)P(B)P(\bar{C})+P(A)P(\bar{B})P(C)+P(\bar{A})P(B)P(C)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times(1-\frac{3}{4})+\frac{4}{5}\times(1-\frac{3}{4})\times\frac{3}{4}+(1-\frac{4}{5})\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{33}{80}.$$

答案：$\frac{33}{80}$

【变式 2】（2022·全国乙卷）某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立，已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1，p_2，p_3，且 $p_3>p_2>p_1>0$，记该棋手连胜两盘的概率为 p，则（　　）

（A）p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关

（B）该棋手在第二盘与甲比赛，p 最大

（C）该棋手在第二盘与乙比赛，p 最大

（D）该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大

解析：记该棋手在第二盘与甲、乙、丙比赛，其连胜两盘的概率分别为 $p_{甲}$，$p_{乙}$，$p_{丙}$，

接下来应把 $p_{甲}$，$p_{乙}$，$p_{丙}$ 用 p_1，p_2，p_3 表示，再比较大小，以 $p_{甲}$ 为例，要连胜两盘，则第二盘必须获胜，第一、三盘一胜一败，第一、三盘的顺序未知，怎么办呢？其实此处可不考虑一、三盘的顺序，我们站在与乙、丙两人比赛的角度来看，反正只需一胜一败即可，其概率为 $p_2(1-p_3)+p_3(1-p_2)$，（此问题的进一步阐释见本题反思）

所以 $p_{甲}=p_1[p_2(1-p_3)+(1-p_2)p_3]=p_1p_2+p_1p_3-2p_1p_2p_3$ ①，

同理，$p_{乙}=p_1p_2+p_2p_3-2p_1p_2p_3$，$p_{丙}=p_1p_3+p_2p_3-2p_1p_2p_3$，要比较 $p_{甲}$，$p_{乙}$，$p_{丙}$ 的大小，可作差来看，

因为 $p_{丙}-p_{甲}=p_1p_3+p_2p_3-2p_1p_2p_3-(p_1p_2+p_1p_3-2p_1p_2p_3)=p_2(p_3-p_1)>0$，所以 $p_{丙}>p_{甲}$；

又 $p_{丙}-p_{乙}=p_1p_3+p_2p_3-2p_1p_2p_3-(p_1p_2+p_2p_3-2p_1p_2p_3)=p_1(p_3-p_2)>0$，所以 $p_{丙}>p_{乙}$，故选 D.

答案：D

【反思】若难以理解上述分析过程中为什么可以不考虑一、三盘的顺序，我们不妨从另一个角度来看，若该棋手在第二场与甲比赛，假设一、三场两种比赛的顺序都有可能发生，把“比赛顺序为乙甲丙”记作事件 A_1，“比赛顺序为丙甲乙”记作事件 A_2，它们发生的概率分别为 p 和 $1-p$，则由全概率公式，

$$P_{甲}=P(A_1)P(连胜两场\,|\,A_1)+P(A_2)P(连胜两场\,|\,A_2)$$

$$=P(A_1)P(胜胜败+败胜胜\,|\,A_1)+P(A_2)P(胜胜败+败胜胜\,|\,A_2)$$

$=p[p_2p_1(1-p_3)+(1-p_2)p_1p_3]+(1-p)[p_3p_1(1-p_2)+(1-p_3)p_1p_2]=p_1p_2+p_1p_3-2p_1p_2p_3$，

这一结果和上面的式①是一样的. 另外，若误认为一、三场两种比赛顺序下连胜两场的概率应直接相加，则会得到 $P_{甲}=2(p_1p_2+p_1p_3-2p_1p_2p_3)$，虽不影响本题的比较大小，但这一结果是错误的.

【总结】在求复杂事件概率时，常根据该事件发生的不同方法，将其拆分成几个互斥事件的并事件，分别求概率再相加. 而求每一种发生方法的概率时，可能又需用到独立事件的乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B)$.

强化训练

1.（2022·汉中模拟·★★）对于事件 A，B，下列命题不正确的是（　　）

（A）若 A，B 互斥，则 $P(A)+P(B)\le 1$

（B）若 A，B 对立，则 $P(A)+P(B)=1$

（C）若 A，B 独立，则 $P(\bar{A})P(\bar{B})=P(\bar{A}\bar{B})$

（D）若 A，B 独立，则 $P(A)+P(B)\le 1$

2.（2023·天水模拟·★★）从 2，3，4，9 中任取两个不同的数，分别记为 a，b，则 $\log_a b=2$ 的概率为（　　）

（A）$\frac{1}{12}$　（B）$\frac{1}{6}$　（C）$\frac{1}{3}$　（D）$\frac{2}{3}$

3.（2023·重庆一模·★★）某人有 1990 年北京亚运会吉祥物“盼盼”，2008 年北京奥运会吉祥物“贝贝”、“晶晶”、“欢欢”、“迎迎”、“妮妮”，2010 年广州亚运会吉祥物“阿祥”、“阿和”、“阿如”、“阿意”、“乐羊羊”，2022 年北京冬奥会吉祥物“冰墩墩”，2022 年杭州亚运会吉祥物“琮琮”、“莲莲”、“宸宸”，若他从这 15 个吉祥物中随机取出两个，这两个吉祥物都是来自在北京举办的运动会的概率是（　　）

（A）$\frac{1}{10}$　（B）$\frac{1}{5}$　（C）$\frac{2}{5}$　（D）$\frac{2}{3}$

4.（2023·绵阳二诊·★★★）寒假来临，秀秀将从《西游记》、《童年》、《巴黎圣母院》、《战争与和平》、《三国演义》、《水浒传》这六部著作中选四部（其中国外两部，国内两部），每周看一部，连续四周看完，则《三国演义》与《水浒传》被选中且在相邻两周看完的概率为（　　）

（A）$\frac{1}{12}$　（B）$\frac{1}{6}$　（C）$\frac{1}{3}$　（D）$\frac{2}{3}$

5．（2023·成都模拟·★★）口袋中装有编号为①、②的 2 个红球和编号为①、②、③、④、⑤的 5 个黑球，小球除颜色、编号外，形状、大小完全相同. 现从中取出 1 个小球，记事件 A 为“取到的小球的编号为②”，事件 B 为“取到的小球是黑球”，则下列说法正确的是（　　）

（A）A 与 B 互斥　　（B）A 与 B 对立　　（C）$P(A\cap B)=\dfrac{6}{7}$　　（D）$P(A\cup B)=\dfrac{6}{7}$

6．（2023·吉林模拟·★★）掷一颗质地均匀的骰子，记随机事件 $A_i=$“向上的点数为 i”，其中 $i=1,2,3,4,5,6$，$B=$“向上的点数为奇数”，则下列说法正确的是（　　）

（A）$\overline{A}_1$ 与 B 互斥　　（B）$A_2+B=\Omega$　　（C）A_3 与 $\overline{B}$ 相互独立　　（D）$A_4\cap B=\varnothing$

7．（2023·全国模拟·★★★）一个质地均匀的正四面体木块的四个面上分别标有数字 1，2，3，4，连续抛掷这个正四面体木块两次，记录每次朝下的面上的数字，设事件 A 为“两次记录的数字之和为奇数”，事件 B 为“第一次记录的数字为奇数”，事件 C 为“第二次记录的数字为偶数”，则下列结论正确的是（　　）

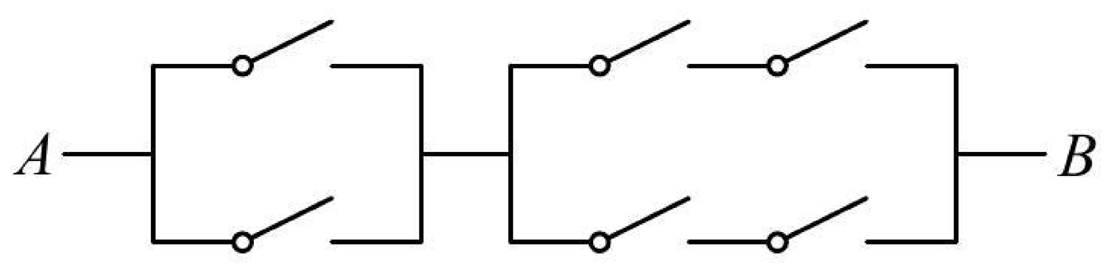
（A）事件 B 与事件 C 是对立事件　　（B）事件 A 与事件 B 不是相互独立事件

（C）$P(A)P(B)P(C)=\dfrac{1}{8}$　　（D）$P(ABC)=\dfrac{1}{8}$

8．（2020·天津卷·★★）已知甲、乙两球落入盒子的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{1}{3}$，假定两球是否落入盒子互不影响，则甲、乙两球都落入盒子的概率为_____；甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为_____.

9．（2022 • 佛山模拟 • ★★★）如图，电路从 A 到 B 上共连接了 6 个开关，每个开关闭合的概率都为 $\frac{2}{3}$，若每个开关是否闭合相互之间没有影响，则从 A 到 B 通路的概率是（　　）

（A）$\frac{10}{27}$　　（B）$\frac{100}{243}$　　（C）$\frac{448}{729}$　　（D）$\frac{40}{81}$



10．（2023 • 江苏模拟 • ★★★）甲、乙两队进行篮球比赛，采取五场三胜制（先胜三场者获胜，比赛结束），根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“客客主主客”，设甲队主场取胜的概率为 0.5，客场取胜的概率为 0.4，且各场比赛相互独立，则甲队在 0:1 落后的情况下，最终获胜的概率为（　　）

（A）0.24　（B）0.25　（C）0.2　（D）0.3

11．（2023 • 全国联考 • ★★★★）甲、乙两队进行冰壶比赛，约定三局两胜（先胜两局者获胜，比赛结束），每局必须决出胜负，胜者下一局执先手，负者下一局执后手. 已知甲队执先、后手胜乙队的概率分别为 p_1， p_2，且 $0<p_1<p_2<1$，记事件 E，F 分别为甲以第一局执先手、第一局执后手获胜，则（　　）

（A）$P(E)<P(F)$　　（B）$P(E)>P(F)$　　（C）$P(E)=P(F)$　　（D）以上都有可能

12．（★★★）甲乙两人进行乒乓球比赛，约定每局胜者得 1 分，负者得 0 分，比赛进行到有一人比对方多 2 分或打满 6 局时停止. 设甲在每局中获胜的概率为 $\frac{2}{3}$，乙在每局中获胜的概率为 $\frac{1}{3}$，且各局胜负相互独立.

（1）求乙赢得比赛（不含平局）的概率；

（2）求比赛停止时已打局数 ξ 的数学期望.